

ПУЧКИ  
В ПЛАЗМЕ

УДК 933.95

ИОННЫЕ КАНАЛЫ, СОЗДАВАЕМЫЕ  
УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПУЧКАМИ  
В ПЛАЗМЕ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© 1999 г. В. Н. Худик, К. В. Лотов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН

Поступила в редакцию 23.04.97 г.

Окончательный вариант получен 17.07.97 г.

Дано описание ионных каналов, образующихся при распространении ультрарелятивистских электронных пучков в разреженной плазме вдоль внешнего магнитного поля  $B_0$ . Определена зависимость радиуса канала от величины  $B_0$  и показано, что продольное магнитное поле в канале всегда меньше внешнего поля. Найдены основные характеристики плазмы: поле скоростей электронов и распределение электронной плотности в пространстве вне канала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Реакции плазмы на пучок заряженных частиц посвящено огромное количество публикаций. С начала семидесятых годов основное внимание исследователей привлекала и привлекает задача о возмущении плотной плазмы слабoreлятивистскими сильноточными пучками (см., например, [1–4]). Позже возможность использования плазмы в ускорителях сверхвысоких энергий [5, 6] пробудила интерес к реакции плазмы на ультрарелятивистские пучки высокой плотности (по сравнению с плотностью плазмы), малого радиуса и малой длительности. В силу ультрарелятивизма, эволюция такого пучка в плазме происходит медленно по сравнению с временем его прохождения через заданное сечение плазмы, и потому при нахождении отклика плазмы пучок можно считать “жестким”. Именно такие пучки рассматриваются в данной работе.

Ионные каналы образуются в плазме при распространении пучков отрицательно заряженных частиц. Когда плотность пучка велика, электроны плазмы полностью выталкиваются из области избыточного отрицательного заряда, в то время как тяжелые ионы остаются на месте. Возникшая полость, в которой отрицательно заряженные частицы пучка окружены только ионами плазмы, и называется ионным каналом. Вне ионного канала пучок индуцирует обратный плазменный ток.

В отсутствие внешнего магнитного поля параметры ионного канала определяются только током пучка. Когда этот ток мал, создаваемое пучком собственное магнитное поле также мало, и радиус канала можно найти, потребовав обращения в нуль электрического поля на границе канала (т.е. из условия зарядовой нейтральности канала). Когда же ток пучка велик, равновесие плазмы является

следствием баланса как электрических, так и магнитных сил [7, 8]. Как показало аналитическое и численное исследование [9], при достаточно плавном переднем фронте пучка образование канала происходит без колебаний его границ.

В настоящей работе мы исследуем ионные каналы, считая, что плазма находится в постоянном внешнем магнитном поле  $B_0$ , коллинеарном оси пучка. Оставляя в стороне вопросы, связанные с динамикой самого пучка [10] или с конкретным видом его равновесной конфигурации [4, 11], определим равновесное распределение плотности электронов плазмы и вычислим параметры канала в зависимости от величины внешнего поля. Перечислим основные допущения, принятые в работе:

1. Предполагается, что все электроны пучка в процессе взаимодействия с плазмой движутся с одной и той же неизменной скоростью  $v_b$ , причем  $v_b \parallel B_0$  (приближение “жесткого” пучка [12]). Такое предположение оправдано для ультрарелятивистских пучков с малым угловым разбросом.

2. Ионы плазмы считаются неподвижными, а их плотность  $n_0$  – постоянной.

3. Для описания электронов плазмы используются уравнения идеальной релятивистской гидродинамики. Следовательно, считается, что характерные направленные скорости электронов много больше их тепловых скоростей, и эффекты рассеяния электронов на ионах плазмы пренебрежимо малы.

Содержание работы следующим образом распределено по разделам. В разд. 2 даются основные уравнения релятивистской электронной гидродинамики и проводится их частичное интегрирование в сделанных выше предположениях. В разд. 3 рассматривается не усложненный геометрическими

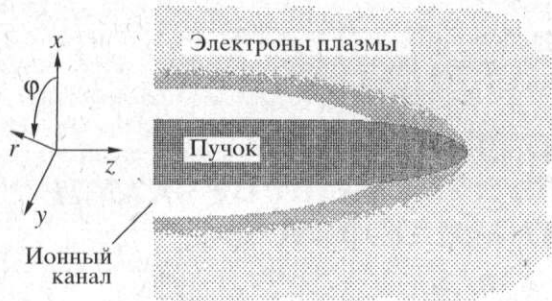


Рис. 1. Геометрия задачи.

факторами случай плоских каналов. Вначале описываются каналы при малом токе пучка и произвольном внешнем магнитном поле. Далее анализируются случаи слабого и сильного магнитного поля, при этом на протекающий через ионный канал ток пучка не накладывается никаких ограничений. В разд. 4 исследуются цилиндрические каналы. Рассматриваются те же предельные случаи, что и в разд. 3. В заключительном разд. 5 приведено необходимое условие образования ионных каналов.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Выберем направление скорости пучка  $v_b$  в качестве оси  $z$  (рис. 1) и будем считать, что плотность пучка  $n_b(x, y, z - v_b t)$  монотонно падает при удалении от оси  $z$ .

Движение плазменных электронов (электронной "жидкости") определяется уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{p} = -e \mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

где  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  – импульс электрона,

$$\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

– релятивистский фактор, а  $m$  и  $(-e)$  – соответственно масса и заряд электрона. Из динамического уравнения (1) и уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

следует уравнение в замороженности

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathcal{H}] \quad (3)$$

для величины

$$\mathcal{H} = \mathbf{B} - (c/e) \text{rot } \mathbf{p} \quad (4)$$

(см., например, [7]).

При ламинарном течении плазмы все характеризующие ее величины, как и плотность пучка, зависят от  $\mathbf{r}$  и  $t$  только в комбинации  $\mathbf{r} - \mathbf{v}_b t$ . Такая зависимость позволяет в явном виде найти поле

$\mathcal{H}$  в произвольный момент времени  $t$ . Рассмотрим два электрона, которые до инъекции пучка находились на одной силовой линии на малом расстоянии друг от друга, и их положение в пространстве определялось, соответственно, радиус-векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_0$  [ $\delta \mathbf{r}_0 = (0, 0, \delta z_0)$ ]. В процессе инъекции пучка положение электронов меняется, и через время  $t$  смещение первого электрона будет равно  $\zeta(t)$ . Второй электрон в точности повторяет движение первого, но с задержкой на время  $\delta t = \delta z_0/c$ . Поэтому расстояние между этими электронами в рассматриваемый момент времени определяется формулой

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_0 + \zeta(t - \delta t) - \zeta(t) = \delta \mathbf{r}_0 - v \delta z_0 / v_b. \quad (5)$$

Уравнение в замороженности (3) означает, что величина  $\mathcal{H}/n_e$  меняется с течением времени пропорционально расстоянию  $\delta \mathbf{r}$  между электронами [13]. Отсюда получаем

$$\mathbf{B} = \frac{c}{e} \text{rot } \mathbf{p} + \frac{n_e}{n_0} (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0 \frac{\mathbf{v}}{v_b}). \quad (6)$$

Ограничимся рассмотрением электронных пучков с плавным нарастанием тока. В этом случае индуцированное течение можно считать стационарным и записать уравнение (1) в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{m}{e} (\mathbf{v} \nabla) \gamma \mathbf{v} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (7)$$

Для получения замкнутой системы уравнения (6) и (7) следует дополнить двумя уравнениями Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} (en_e \mathbf{v} + en_b \mathbf{v}_b), \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e (n_0 - n_b - n_e). \quad (9)$$

В образовавшемся ионном канале магнитное поле создается только током пучка:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} en_b \mathbf{v}_b, \quad (10)$$

а электрическое поле – зарядом пучка и неподвижного ионного фона канала:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e (n_0 - n_b), \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (11)$$

Значения этих полей на границе канала должны использоваться в качестве граничных условий при решении уравнений (6)–(9).

Интегрированием уравнений (2) и (8) в плоскости  $(x, y)$  можно убедиться, что в рассматриваемой системе сохраняются поток магнитного поля и полный ток через плоскость, перпендикулярную оси пучка:

$$\int dx dy (B_z - B_0) = 0, \quad (12)$$

$$\int dx dy (n_e v_z + n_b v_b) = 0. \quad (13)$$

При условии стационарности канала (когда производная  $\partial E_z / \partial z$  мала) из (9) также следует общая зарядовая нейтральность пучка и плазмы в каждом поперечном сечении:

$$\int dx dy (n_0 - n_e - n_b) = 0. \quad (14)$$

Основное внимание в нашей работе будет уделено пучкам, все частицы которых находятся внутри ионного канала. Характеристики таких каналов не зависят от конфигурации пучка и полностью определяются двумя физическими величинами: силой тока пучка и напряженностью внешнего магнитного поля. Также в дальнейшем пренебрежем отличием  $v_b$  от скорости света.

### 3. ПЛОСКИЕ ИОННЫЕ КАНАЛЫ

Рассмотрим пучок, плотность которого зависит только от  $x$  и  $z$ . Введем обозначения

$$b_0 = \frac{B_0}{4\pi en_0 \lambda_p}, \quad \lambda_p = \frac{c}{\omega_p}, \quad \omega_p = \left( \frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{4\pi en_0 \lambda_p}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{E}}{4\pi en_0 \lambda_p}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (16)$$

$$\tilde{n} = \frac{n_e}{n_0}, \quad \tilde{n}_b = \frac{n_b}{n_0}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\lambda_p}. \quad (17)$$

Поскольку в случае стационарных каналов  $x$ -компоненты скорости и магнитного поля равны нулю, уравнения (6), (7) и (8) в новых переменных можно записать в виде

$$b_y = -(\gamma u_z)' - b_0 \tilde{n} u_y, \quad (18)$$

$$b_z = (\gamma u_y)' + b_0 \tilde{n} (1 - u_z), \quad (19)$$

$$b_y' = -\tilde{n} u_z - \tilde{n}_b, \quad (20)$$

$$b_z' = \tilde{n} u_y, \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = -[\mathbf{u} \times \mathbf{b}], \quad (22)$$

где штрихи означают дифференцирование по координате  $\tilde{x}$ . Используя (18)–(22), можно выразить дивергенцию электрического поля через плотность  $\tilde{n}$ , скорость  $\mathbf{u}$  и магнитное поле  $\mathbf{b}$ . Подставив результат в (9) и произведя простую перегруппировку членов, получаем выражение

$$\tilde{n} = \frac{\gamma - \gamma(1 - u_z)\tilde{n}_b + b_z^2 + b_y^2 - \epsilon_x^2}{\gamma^{-1} + (1 - u_z)b_0 b_z + u_y b_0 (\epsilon_x - b_y)}. \quad (23)$$

При протекании тока пучка в пределах ионного канала полагаем  $\tilde{n}_b = 0$  в уравнениях (20) и (23).

Граничные условия для (18)–(23) получаются следующим образом. Проинтегрируем уравнение (19) по области вне канала. Используя интеграль-

ные равенства (12)–(14) и учитывая, что  $z$ -компонента магнитного поля не меняется внутри канала, находим

$$\gamma_* u_{y*} = b_{z*} \tilde{x}_*, \quad (24)$$

где  $\tilde{x}_*$  – полуширина ионного канала в единицах  $\lambda_p$ , а символ “\*” используется для обозначения полей и параметров плазмы вблизи границы канала. Из (10) получаем второе граничное условие:

$$b_{y*} = -\tilde{I}_b, \quad (25)$$

где  $\tilde{I}_b$  – ток пучка на единицу длины в направлении  $y$ , измеряемый в единицах  $I_c = 2en_0 c \lambda_p$ :

$$\tilde{I}_b = \frac{1}{I_c} \int_{-x_*}^{x_*} en_b c dx.$$

Еще одно условие появляется из непрерывности  $E_x$  на границе канала. Выражая  $\epsilon_x$  из (11) и приравнявая его к (22), получаем

$$\gamma_*(1 - u_{z*})\tilde{I}_b = \tilde{x}_*(\gamma_* + b_{z*}^2). \quad (26)$$

При заданных значениях  $\tilde{I}_b$  и  $b_0$  общее решение уравнений (18)–(23) с граничными условиями (24)–(26) зависит от двух параметров, в качестве которых можно взять  $u_{y*}$ ,  $u_{z*}$ . Поскольку на больших расстояниях от канала плазменные электроны покоятся, скорости  $u_{y*}$  и  $u_{z*}$  как функции от  $\tilde{I}_b$  и  $b_0$  можно найти из условий

$$u_y(\tilde{x}; u_{y*}, u_{z*}, \tilde{I}_b, b_0) \Big|_{\tilde{x} \rightarrow \infty} = 0, \quad (27)$$

$$u_z(\tilde{x}; u_{y*}, u_{z*}, \tilde{I}_b, b_0) \Big|_{\tilde{x} \rightarrow \infty} = 0. \quad (28)$$

Для произвольных значений внешнего магнитного поля и тока пучка система (18)–(23) решается только численно (рис. 2–5 получены таким образом). Но если ток пучка мал или внешнее магнитное поле является малым или большим параметром, уравнения (18)–(23) можно исследовать аналитически.

#### 3.1. Малый ток пучка

В системе, состоящей из пучка, плазмы и внешнего магнитного поля, пучок является возмущающим плазму фактором, а внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  – стабилизирующим фактором. Поэтому естественно предположить, что при  $\tilde{I}_b \ll 1$  индуцированное пучком течение плазмы является нерелятивистским, а возмущение магнитного поля мало (рис. 2):

$$|\mathbf{u}| \ll 1, \quad b_{\perp}^2 \ll 1 + b_0^2, \quad |\delta b_z| \ll 1, \quad (29)$$

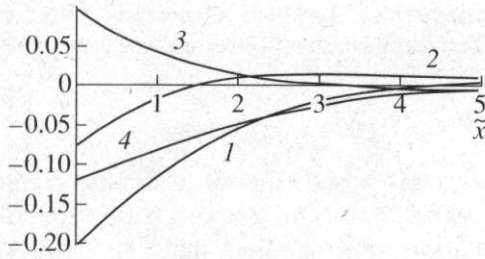


Рис. 2. Возмущение магнитного поля ( $1 - b_y$ ;  $2 - \delta b_z$ ) и ненулевые компоненты импульса плазменных электронов ( $3 - \gamma u_y$ ;  $4 - \gamma u_z$ ) для малого тока пучка ( $\tilde{I}_b = 0.2$ ) и магнитного поля  $b_0 = 2$  (плоская геометрия).

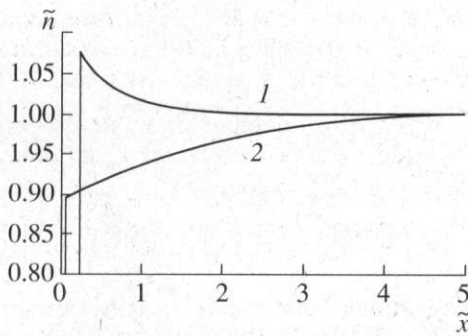


Рис. 3. Профили плотности электронов плазмы для малого тока пучка ( $\tilde{I}_b = 0.2$ ) и магнитного поля различной величины ( $1 - b_0 = 0.1$ ;  $2 - b_0 = 2$ ) (плоская геометрия).

где  $b_{\perp}^2 = b_x^2 + b_y^2$ , а  $\delta b_z = b_z - b_0$ . При сделанных предположениях плотность электронов плазмы вне канала, вычисленная с помощью формулы (23), оказывается почти постоянной величиной:  $\tilde{n} \approx 1$  ( $n_e \approx n_0$ ). Малая поправка к единице равна

$$\delta \tilde{n} = \tilde{n} - 1 \approx \frac{b_0}{1 + b_0^2} (\delta b_z + b_0 u_z). \quad (30)$$

Полагая  $\gamma \approx 1$  и опуская малые члены, пропорциональные  $\delta \tilde{n} u_z$  и  $\delta \tilde{n} u_y$ , можно линеаризовать уравнения (18)–(21):

$$b_y = -u'_z - b_0 u_y, \quad \delta b_z = (1 + b_0^2) u'_y - b_0 u_z. \quad (31)$$

$$b'_y = -u_z, \quad \delta b'_z = u_y. \quad (32)$$

С учетом (29) из условия (26) находим полуширину канала:

$$\tilde{x}_* \approx \frac{\tilde{I}_b}{1 + b_0^2}. \quad (33)$$

Как видно из (33), при фиксированном токе пучка канал сужается с ростом внешнего магнитного поля. При этом средняя в пределах канала плотность частиц пучка растет:  $\langle \tilde{n}_b \rangle = 1 + b_0^2$ .

Удовлетворяющее граничным условиям

$$u_{y*} = b_0 \tilde{x}_*, \quad b_{y*} = -\tilde{I}_b$$

и убывающее при больших  $\tilde{x}$  решение системы линейных уравнений (31), (32) имеет вид

$$b_y = -\tilde{I}_b \operatorname{Re}[e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}], \quad \delta b_z = -\tilde{I}_b \operatorname{Im}[k e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}], \quad (34)$$

$$u_y = \tilde{I}_b \operatorname{Im}[k^2 e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}], \quad u_z = -\tilde{I}_b \operatorname{Re}[k e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}], \quad (35)$$

где  $k = (1 - ib_0)^{-1/2}$  (рис. 2). Поле внутри канала отличается от приложенного внешнего магнитного поля на малую величину:

$$b_{z*} = b_0 - \tilde{I}_b \operatorname{Im} k, \quad (36)$$

а плотность электронов вне канала равна

$$\tilde{n} = 1 - \tilde{I}_b b_0 \operatorname{Im}[k^3 e^{k(\tilde{x}_* - \tilde{x})}] \quad (37)$$

(рис. 3). Отметим, что в формулах (34), (35) и (37) член  $k \tilde{x}_*$  в показателе экспоненты может быть опущен без нарушения точности рассматриваемого приближения.

### 3.2. Слабое магнитное поле

При малом  $b_0$  компонента поля  $b_z$  также мала во всем пространстве, и в нулевом приближении можно вообще пренебречь влиянием внешнего магнитного поля на движение электронов плазмы. В этом случае плазма вне канала описывается уравнениями

$$(\gamma u_z)' = -b_y, \quad b'_y = -\tilde{n} u_z, \quad (38)$$

$$\tilde{n} = \gamma^2 + b_y^2 / \gamma \quad (39)$$

с граничными условиями

$$u_{z*} = 1 - \frac{\tilde{x}_*}{\tilde{I}_b}, \quad b_{y*} = -\tilde{I}_b. \quad (40)$$

Сделав широкоупотребительную в релятивистской кинематике замену  $u_z = \operatorname{th} \chi$ , можно переписать (38)–(40) в виде

$$\chi'' = \operatorname{sh} \chi, \quad (41)$$

$$\chi'_* = \tilde{x}_* e^{\chi_*}, \quad \chi_* = \frac{1}{2} \ln \left( 2 \frac{\tilde{I}_b}{\tilde{x}_*} - 1 \right). \quad (42)$$

Локализованное решение уравнения (41) с условиями (42) имеет вид

$$\text{th}(\chi/4) = \text{th}(\chi_*/4)e^{\tilde{x}_* - \tilde{x}}, \quad (43)$$

где полуширина канала  $\tilde{x}_*$  задается формулой

$$\tilde{x}_* = -2 \text{sh}(\chi_*/2)e^{-\chi_*}, \quad (44)$$

а отрицательный параметр  $\chi_*$  взаимно однозначно связан с током пучка:

$$\tilde{I}_b = -2 \text{sh}(\chi_*/2) \text{ch} \chi_*. \quad (45)$$

Для  $\tilde{I}_b \ll 1$  имеем

$$\chi_* \approx -\tilde{I}_b, \quad \tilde{x}_* \approx \tilde{I}_b, \quad u_z \approx \chi \approx -\tilde{I}_b e^{\tilde{x}_* - \tilde{x}}, \quad (46)$$

$$\langle n_b \rangle = n_0 (\tilde{I}_b / \tilde{x}_*) \approx n_0. \quad (47)$$

Для  $\tilde{I}_b \gg 1$

$$\chi_* \approx -\frac{2}{3} \ln(2\tilde{I}_b), \quad \tilde{x}_* \approx 2\tilde{I}_b, \quad \langle n_b \rangle \approx \frac{n_0}{2}. \quad (48)$$

В последнем случае основная масса вытесненных из канала электронов движется в тонком приграничном слое толщины  $\delta \tilde{x}_* \sim \tilde{I}_b^{-1/3}$  (кривая “ $b_0 \rightarrow 0$ ” на рис. 4а). Релятивистский фактор этих частиц  $\gamma \sim \tilde{I}_b^{2/3} \gg 1$  (рис. 4б), а их плотность  $\tilde{n} \sim \tilde{I}_b^{4/3}$ .

Таким образом, пренебрегая внешним магнитным полем, с помощью формул (43)–(45) можно вычислить функцию  $\chi$ , а затем найти скорость  $u_z$  и плотность  $\tilde{n}$  электронов вне канала и компоненту  $b_z$  магнитного поля. Наличие малого внешнего поля  $b_0$  приводит в первом приближении к медленному движению электронов плазмы вдоль направления  $y$ . Это движение описывается уравнениями (19) и (21), которые сводятся к одному уравнению для скорости  $u_y$ :

$$(\gamma u_y)'' - \tilde{n} u_y = -b_0 [\tilde{n}(1 - u_z)], \quad (49)$$

которое решается методом вариации постоянных [14] ( $\gamma$ ,  $\tilde{n}$  и  $u_z$  в (49) являются известными функциями координаты  $\tilde{x}$ ). В частности, оказывается, что продольное магнитное поле в канале равно

$$b_{z*} = b_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{3e^{-\chi_*} - 3e^{\chi_*} + 4\chi_*}{2e^{-3\chi_*} - 4e^{-2\chi_*} + 6e^{-\chi_*} - 4} \right). \quad (50)$$

При малом токе пучка  $b_{z*} \approx b_0(1 - \tilde{I}_b/2)$ . Такой же результат получается из (36) подстановкой  $b_0/2$  вместо  $\text{Im}k$ . Когда  $\tilde{I}_b \gg 1$ , продольное поле в канале  $b_{z*} \approx b_0/2$ . Вытесненное поле находится в тонком

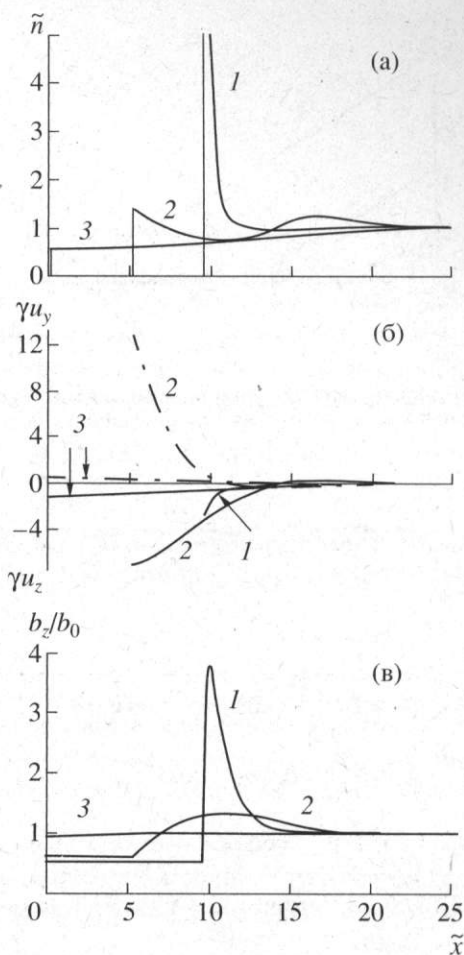


Рис. 4. Плотность плазменных электронов (а), z- и y-компоненты их импульса (соответственно, сплошные и прерывистые линии на рисунке (б) и продольное магнитное поле (в) для большого тока пучка ( $\tilde{I}_b = 5$ ) и различных значений  $b_0$  (плоская геометрия): 1 -  $b_0 \rightarrow 0$ ; 2 -  $b_0 = 4$ ; 3 -  $b_0 = 25$ .

приграничном слое толщины  $\delta \tilde{x}_*$  и по порядку величины равно  $b_{\text{max}} \sim \tilde{I}_b^{4/3} b_0$  (кривая “ $b_0 \rightarrow 0$ ” на рис. 4в).

### 3.3. Сильное магнитное поле

Сильное магнитное поле подавляет движение электронов плазмы во всем пространстве вне канала (кривые “ $b_0 = 25$ ” на рис. 4б). Вследствие этого при достаточно больших значениях  $b_0$  неравенства (29) выполняются при произвольном (но не очень большом) токе пучка. В этом случае возмущение плотности электронов плазмы вне канала мало (рис. 4а), и для вычисления магнитных полей и электронных скоростей можно использовать

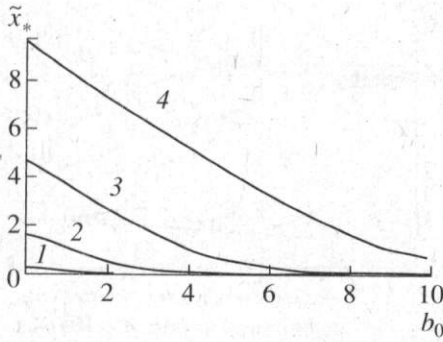


Рис. 5. Зависимость полуширины ионного канала от внешнего магнитного поля для различных значений тока пучка  $\tilde{I}_b$ : 1 -  $\tilde{I}_b = 0.2$ ; 2 - 1; 3 - 2.5; 4 - 5.

формулы линейного приближения (34)–(37). При  $b_0 \gg 1$  выражения (34)–(37) принимают вид

$$b_y = -\tilde{I}_b e^{-k_1 \tilde{x}} \cos k_1 \tilde{x}, \quad (51)$$

$$\delta b_z = k_1 \tilde{I}_b e^{-k_1 \tilde{x}} (\sin k_1 \tilde{x} - \cos k_1 \tilde{x}), \quad (52)$$

$$u_y = (\tilde{I}_b / b_0) e^{-k_1 \tilde{x}} \cos k_1 \tilde{x}, \quad (53)$$

$$u_z = -k_1 \tilde{I}_b e^{-k_1 \tilde{x}} (\cos k_1 \tilde{x} + \sin k_1 \tilde{x}), \quad (54)$$

где  $k_1 = 1/\sqrt{2b_0}$ . Полуширина канала и поле внутри канала равны

$$\tilde{x}_* \approx \frac{\tilde{I}_b}{b_0^2} \quad \text{и} \quad b_{z*} \approx b_0 \left( 1 - \frac{2\tilde{I}_b}{(2b_0)^{3/2}} \right) \quad (55)$$

соответственно. Плотность электронов вне канала близка к плотности ионов ( $\delta \tilde{n} = u_z \propto b_0^{-1/2}$ ), а средняя плотность частиц пучка (в пределах канала) растет с ростом  $b_0$ :  $\langle \tilde{n}_b \rangle \approx b_0^2$ .

### 3.4. Обсуждение результатов

Мы видим, что внешнее магнитное поле стремится подавить ионный канал. Как следствие, ширина канала максимальна в отсутствие поля и монотонно уменьшается с ростом  $b_0$  (рис. 5). При  $\tilde{I}_b > b_0/2 \gg 1$  это уменьшение происходит почти линейно:  $\tilde{x}_* \approx 2\tilde{I}_b - b_0$ . При малом же токе пучка или сильном внешнем поле сужение канала описывается приближенной формулой (33).

Продольное магнитное поле внутри канала всегда меньше  $b_0$ , но больше  $b_0/2$ . Отношение поля в канале к внешнему магнитному полю убывает при увеличении тока пучка или при уменьшении  $b_0$ .

В случае малого тока пучка ( $\tilde{I}_b \ll 1$ ) или большого внешнего поля ( $b_0 \gg \tilde{I}_b$ ) плотность плазменных электронов вне канала примерно равна плотности ионов, а движение электронов является нерелятивистским. В противном случае ( $\tilde{I}_b \geq 1 + b_0$ ) электроны, вытолкнутые пучком из канала, концентрируются вблизи его границы (образуя резкий пик плотности) и двигаются там с релятивистскими скоростями (кривые “ $b_0 = 4$ ” и “ $b_0 \rightarrow 0$ ” на рис. 4).

## 4. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ИОННЫЕ КАНАЛЫ

В аксиально-симметричном случае каждый электрон плазмы движется по спирали, ось которой совпадает с осью пучка. Используя обозначения (15)–(17), цилиндрические координаты ( $r, \varphi, z$ ) (рис. 1) и переменную  $\rho = r/\lambda_p$ , уравнения (6) и (8) можно записать в виде

$$b_\varphi = -\frac{d}{d\rho}(\gamma u_z) - b_0 \tilde{n} u_\varphi, \quad (56)$$

$$\delta b_z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho \gamma u_\varphi) + b_0 \delta \tilde{n} - b_0 \tilde{n} u_z, \quad (57)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho b_\varphi) = -\tilde{n} u_z - \tilde{n}_b, \quad (58)$$

$$\frac{d}{d\rho} \delta b_z = \tilde{n} u_\varphi. \quad (59)$$

Приравнивая силу Лоренца к центростремительной силе, нетрудно найти электрическое поле:

$$\epsilon = -[\mathbf{u} \times (\mathbf{b} - \boldsymbol{\omega})], \quad (60)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \gamma u_\varphi/\rho)$ . Выражая дивергенцию электрического поля через  $\tilde{n}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{b}$ , вместо (23) получаем

$$\tilde{n} = \frac{\gamma - \gamma(1 - u_z)\tilde{n}_b + (b_z - \omega_z)^2 + \omega_z^2 + b_\varphi^2 - \epsilon_\rho^2}{\gamma^{-1} + (1 - u_z)b_0(b_z - 2\omega_z) + u_\varphi b_0(\epsilon_\rho - b_\varphi)}, \quad (61)$$

где  $\tilde{n}_b = 0$  для узких пучков.

Аналогично случаю плоских каналов в качестве граничных условий имеем

$$\gamma_* u_{\varphi*} = \frac{1}{2} b_{z*} \rho_*, \quad (62)$$

$$b_{\varphi*} = -\frac{\tilde{I}_b}{2\rho_*}, \quad (63)$$

$$\gamma_*(1 - u_{z*})\tilde{I}_b = \rho_*^2(\gamma_* + b_{z*}^2/2), \quad (64)$$

$$u_\varphi|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad u_z|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad (65)$$

где  $\rho_*$  – радиус ионного канала в единицах  $\lambda_p$ , а  $\tilde{I}_b$  – ток пучка в единицах  $I_c = mc^3/4e$ . Рисунки 6–9 получены прямым численным интегрированием (56)–(65).

4.1. Малый ток пучка

Как и в плоском случае, при малом токе пучка движение электронов плазмы происходит с нерелятивистскими скоростями (рис. 6б), а возмущение магнитного поля мало. Считая выполненными неравенства (29), из граничного условия (64) можно найти радиус канала:

$$\rho_*^2 \approx \frac{\tilde{I}_b}{1 + b_0^2/2}. \quad (66)$$

Отбрасывая малые члены, для плотности электронов вне канала из (61) получаем выражение

$$\tilde{n} \approx 1 + \frac{(b_0/2 - \omega_z)(\delta b_z + b_0 u_z) + \omega_z^2}{b_0(\beta + b_{z*}/2 - \omega_z)}, \quad (67)$$

в котором  $\beta = 1/(2b_0)$ ,  $b_{z*} \approx b_0$ , а  $\omega_z \approx u_\phi/\rho$ . Как видно из (67), плотность электронов вблизи цилиндрического канала сильно отличается от плотности ионов при не слишком малом внешнем поле:

$$\tilde{n}_* \approx 1 + b_0^2/2 \text{ (рис. 6а).}$$

Будем для простоты считать, что  $b_0 \sim 1$ . Тогда вблизи канала  $\omega_z \sim 1$  и  $\delta \tilde{n} \sim 1$ , так что с учетом неравенств (29) вместо (57) можно использовать уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \omega_z + \frac{\omega_z^2}{\beta + b_{z*}/2 - \omega_z} = 0. \quad (68)$$

С учетом граничного условия (62) интегрирование (68) позволяет найти угловую скорость вращения электрона плазмы, находящегося на расстоянии  $\rho$  от оси канала:

$$\omega_z = \beta + \frac{b_{z*}}{2} - \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\beta + \frac{b_{z*}}{2}\right)^2 (\rho^2 - \rho_*^2) + \beta^2 \rho_*^2}, \quad (69)$$

а также его азимутальную скорость  $u_\phi \approx \omega_z \rho$ . При  $\rho_* \ll \rho \ll 1$  эта скорость падает обратно пропорционально радиусу:

$$u_\phi = \frac{b_0 \tilde{I}_b}{2(1 + b_0^2)\rho}, \quad (70)$$

а возмущение плотности электронов равно

$$\delta \tilde{n} = \frac{2u_\phi^2}{\rho \sqrt{(\rho^2 - \rho_*^2)(1 + b_0^2)^2 + \rho_*^2}}. \quad (71)$$

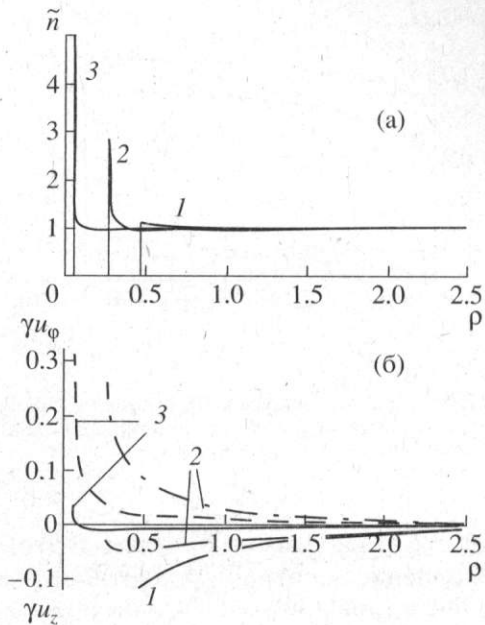


Рис. 6. Плотность плазменных электронов (а), z- и u-компоненты их импульса (соответственно, сплошные и прерывистые линии на рисунке (б) для малого тока пучка и различных значений  $b_0$  ( $\tilde{I}_b = 0.2$ , осесимметричная геометрия): 1 –  $b_0 \rightarrow 0$ ; 2 –  $b_0 = 2$ ; 3 –  $b_0 = 10$ .

Из этого выражения видно, что плотность имеет резкий пик на границе канала. Высота пика  $\tilde{n}_{\max} = 1 + b_0^2/2$ , а его ширина (на полувысоте)  $\delta \rho \sim \rho_*/(1 + b_0^2)^2$ . При  $\rho \sim \rho_*$  возмущение плотности  $\delta \tilde{n} \sim 1$ , так что общее число частиц в пике по порядку величины равно  $\delta N \sim \tilde{I}_b/b_0^2$ .

Вблизи канала легко находится и  $\phi$ -компонента магнитного поля. В области  $\rho \ll 1$  токовая компенсация пренебрежимо мала, так что азимутальная составляющая поля создается в основном током пучка:

$$b_\phi \approx -\frac{1}{2\rho} \tilde{I}_b. \quad (72)$$

Зная  $u_\phi$ ,  $\tilde{n}$  и  $b_\phi$ , нетрудно проинтегрировать уравнения (56), (59) и найти  $u_z$  и  $b_z$  при  $\rho \ll 1$ :

$$u_z = u_{z*} + \Phi(u_\phi) - \Phi(u_{\phi*}), \quad (73)$$

$$b_z = b_{z*} - \frac{1}{b_0} [\Phi(u_\phi) - \Phi(u_{\phi*})] + \frac{\tilde{I}_b}{2b_0} \ln \frac{\rho}{\rho_*}, \quad (74)$$

где

$$\Phi(u_\phi) = \Lambda \left( u_\phi^2 - \frac{\rho_*^2}{2} \ln u_\phi \right), \quad \Lambda = \frac{1 + b_0^2/2}{1 + b_0^2}.$$

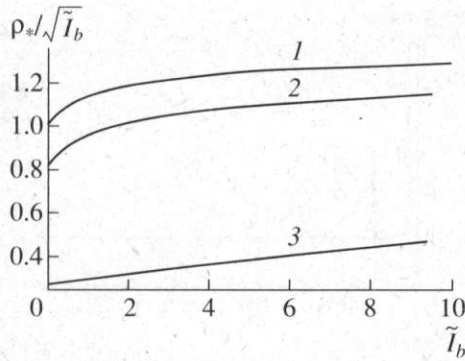


Рис. 7. Увеличение радиуса канала с увеличением тока пучка в магнитном поле различной величины: 1 -  $b_0 \rightarrow 0$ ; 2 -  $b_0 = 1$ ; 3 -  $b_0 = 5$ .

Вдали же от канала  $\omega_z$  и  $\delta\tilde{n}$  малы. В этой области возмущение электронной плотности определяется формулой (30), и для описания каналов можно использовать линейную систему уравнений

$$b_\varphi = -\frac{d}{d\rho}u_z - b_0u_\varphi, \quad (75)$$

$$\delta b_z = (1 + b_0^2)\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\rho u_\varphi - b_0u_z, \quad (76)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho b_\varphi) = -u_z, \quad \frac{d}{d\rho}\delta b_z = u_\varphi. \quad (77)$$

Убывающее с ростом  $\rho$  решение этой системы выражается через модифицированные функции Бесселя второго рода  $K_0$  и  $K_1$ :

$$b_\varphi = -\text{Re}[AkK_1(k\rho)], \quad (78)$$

$$\delta b_z = -\text{Im}[Ak^2K_0(k\rho)], \quad (79)$$

$$u_\varphi = \text{Im}[Ak^3K_1(k\rho)], \quad (80)$$

$$u_z = -\text{Re}[Ak^2K_0(k\rho)], \quad (81)$$

где, как и в плоском случае,  $k = (1 - ib_0)^{-1/2}$ , а  $A$  - некоторая комплексная константа. В области  $\rho_* \ll \rho \ll 1$  формулы (80) и (78) для  $u_\varphi$  и  $b_\varphi$  должны переходить в (70) и (72) соответственно. Этим определяется константа  $A$ :

$$A = \frac{1}{2}\tilde{I}_b. \quad (82)$$

После сшивки формул (81), (79) с формулами (73), (74) в области  $\rho_* \ll \rho \ll 1$  находятся  $z$ -компо-

нента скорости электронов на границе канала и  $z$ -компонента магнитного поля в канале:

$$u_{z*} = \tilde{I}_b \text{Im} W, \quad b_{z*} = b_0 - \tilde{I}_b \text{Re} W, \quad (83)$$

$$W \equiv \frac{1}{4}[k^2 b_0 + 2ik^2 \ln(\tilde{\gamma}\Lambda k\rho_*/2)] + \frac{\ln\Lambda}{2b_0}, \quad (84)$$

где постоянная  $\tilde{\gamma} \approx 1.78107$  выражается через постоянную Эйлера-Маскерони  $C$  [14]:  $\tilde{\gamma} = e^C$ . В случае большого внешнего поля

$$u_{z*} \approx \frac{1}{4}\tilde{I}_b, \quad b_{z*} \approx b_0 - \frac{\tilde{I}_b}{4b_0} \left( \ln \frac{2b_0^3}{\tilde{\gamma}^2 \tilde{I}_b} + 1 \right). \quad (85)$$

Для вычисления возмущения плотности плазмы во всей области  $\rho \geq \rho_*$  можно использовать следующую формулу:

$$\delta\tilde{n} = \frac{2u_\varphi^2}{\rho \sqrt{(\rho^2 - \rho_*^2)(1 + b_0^2)^2 + \rho_*^2}} - \frac{\tilde{I}_b}{2} b_0 \text{Im}[k^4 K_0(k\rho)] \quad (86)$$

(рис. 6а). Отметим, что определенное таким образом возмущение плотности плазмы удовлетворяет условию зарядовой нейтральности

$$\frac{1}{2}(1 - \langle \tilde{n}_b \rangle) \rho_*^2 - \int_{\rho_*}^{\infty} \delta\tilde{n} \rho d\rho = 0.$$

До сих пор мы считали, что  $b_0$  больше или порядка единицы. Когда  $b_0 \ll 1$ , возмущение плотности электронов плазмы всюду вне канала мало, а магнитные поля и скорости электронов определяются формулами линейной теории (78)–(82). В частности,  $z$ -компонента магнитного поля в канале равна

$$b_{z*} \approx b_0 - \frac{\tilde{I}_b}{4} b_0 \left( \ln \frac{4}{\tilde{\gamma}^2 \tilde{I}_b} - 1 \right). \quad (87)$$

#### 4.2. Слабое магнитное поле

Когда  $b_0$  мало, при вычислении параметров канала можно полностью пренебречь внешним магнитным полем. В этом случае радиус канала  $\rho_*$

оказывается примерно пропорциональным  $\sqrt{\tilde{I}_b}$  (кривая " $b_0 \rightarrow 0$ " на рис. 7). При  $\tilde{I}_b \ll 1$  радиус канала  $\rho_* \approx \sqrt{\tilde{I}_b}$ , а возмущение плотности электронов вне канала мало. При  $\tilde{I}_b \gg 1$  радиус канала



$\rho_* \approx \sqrt{2\tilde{I}_b}$ , хотя  $\rho_*$  приближается к этому асимптотическому значению медленно. При большом токе пучка вытесненные из канала электроны движутся в тонком приграничном слое толщины  $\delta\rho_* \sim \tilde{I}_b^{-1/6}$  (кривые " $b_0 \rightarrow 0$ " на рис. 8). Релятивистский фактор этих частиц  $\gamma \sim \tilde{I}_b$ , а их плотность  $\tilde{n} \sim \tilde{I}_b^{2/3}$ .

Учет внешнего поля  $b_0$  дает в первом приближении скорость азимутального вращения плазменных электронов. Вращение электронов вокруг оси пучка приводит к частичному вытеснению продольного магнитного поля из канала. Это вытеснение мало при малом токе пучка. С ростом силы тока оно растет, и при больших  $\tilde{I}_b$  продольное поле в канале приближается к  $b_0/2$  (кривая " $b_0 \rightarrow 0$ " на рис. 9). Соответственно, в приграничном слое толщины  $\delta\rho_*$  магнитное поле увеличивается на величину порядка  $\tilde{I}_b^{2/3}$  по сравнению с невозмущенным значением  $b_0$  (рис. 8в).

### 4.3. Сильное магнитное поле

При исследовании плоских каналов мы видели, что случай  $b_0 \rightarrow \infty$  во многом аналогичен случаю  $\tilde{I}_b \rightarrow 0$ . Такая же аналогия имеет место и для цилиндрических каналов. При больших полях радиус канала  $\rho_* \sim \sqrt{\tilde{I}_b}/b_0$  (кривая " $b_0 = 5$ " на рис. 7), а возмущение  $z$ -компоненты магнитного поля в канале  $|\delta b_{z*}| \sim \tilde{I}_b/b_0$ . Как видно из (62),  $\gamma u_{\phi*} \sim \sqrt{\tilde{I}_b}$ , так что теперь движение электронов на границе канала является релятивистским даже при  $\tilde{I}_b \sim 1$  (рис. 10). Область релятивистского движения, однако, узка ( $\sim \tilde{I}_b/b_0$ ), так что ее пространственный заряд и ток малы ( $\sim \tilde{I}_b^2/b_0^2$ ) и недостаточны для экранировки заряда и тока пучка. Следовательно, имеют место приближенные равенства

$$\epsilon_{\rho} \approx \frac{\tilde{I}_b}{2\rho}, \tag{88}$$

$$b_{\phi} \approx \frac{\tilde{I}_b}{2\rho}. \tag{89}$$

При  $\rho \gg \tilde{I}_b/b_0$  скорости электронов и возмущение магнитного поля малы и определяются формулами линейной теории (78)–(81). Одно из соотношений, определяющих константу  $A$ , можно получить из условия совпадения формул (78) и (89) в

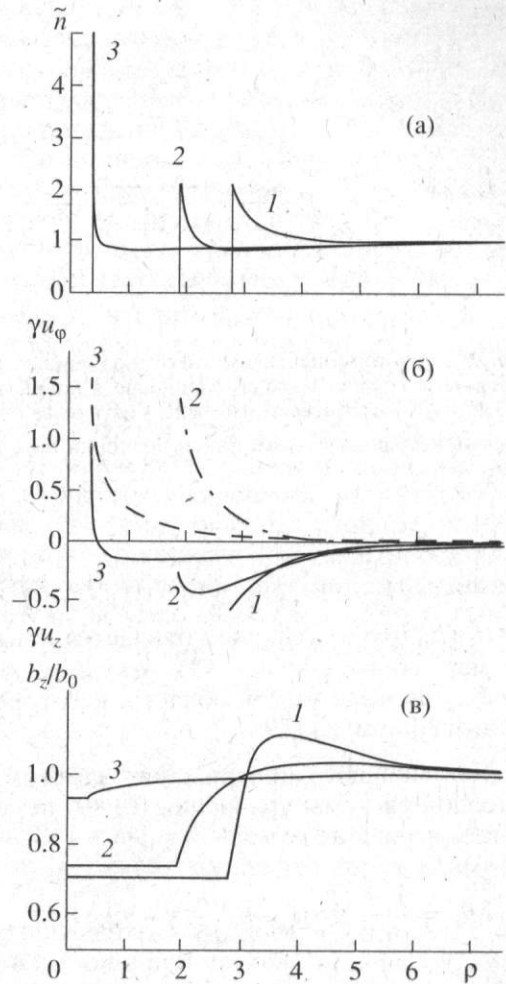


Рис. 8. Плотность плазменных электронов (а),  $z$ - и  $y$ -компоненты их импульса (соответственно, сплошные и прерывистые линии на рисунке б) и продольное магнитное поле (в) для большого тока пучка ( $\tilde{I}_b = 5$ ) и различных значений  $b_0$  (осесимметричная геометрия): 1 -  $b_0 \rightarrow 0$ ; 2 -  $b_0 = 2$ ; 3 -  $b_0 = 10$ .

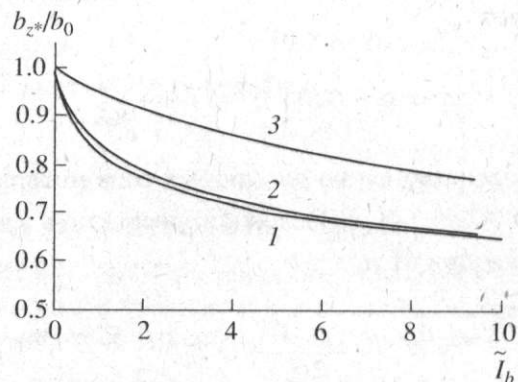
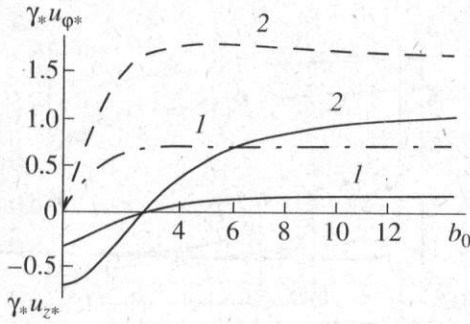


Рис. 9. Вытеснение магнитного поля из канала по мере увеличения тока пучка для различных значений  $b_0$ : 1 -  $b_0 \rightarrow 0$ ; 2 -  $b_0 = 1$ ; 3 -  $b_0 = 5$ .



**Рис. 10.** z- и  $\phi$ -компоненты импульса плазменных электронов на границе канала (сплошные и прерывистые линии, соответственно) в зависимости от величины внешнего поля для различных значений тока  $\tilde{I}_b$ :  
1 -  $\tilde{I}_b = 1$ ; 2 - 5.

общей области применимости  $\tilde{I}_b/b_0 \ll \rho \ll \sqrt{b_0}$ :

$ReA \approx \tilde{I}_b/2$ . Другое условие появляется из сохранения магнитного потока (12), откуда получаем  $ImA \approx 0$ , учитывая узость области, в которой не применима формула (79).

Для дальнейшего продвижения заметим, что из исходной системы уравнений (6)–(9) нетрудно получить уравнение

$$\delta b_z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \left[ \gamma u_\phi - b_0 \frac{d}{d\rho} (\gamma - \gamma u_z) \right] \quad (90)$$

(см. Приложение). Разность в круглых скобках [правая часть (90)] в области  $\tilde{I}_b/b_0 \ll \rho \ll \sqrt{b_0}$  (где можно использовать формулы (78)–(81)) является почти постоянно величиной:

$$\gamma - \gamma u_z \approx 1 + (\pi/8) \tilde{I}_b/b_0.$$

С учетом малости размеров области, где не применимо линейное приближение, интегрирование (90) дает

$$\gamma - \gamma u_z = \alpha + O(b_0^{-2}), \quad \alpha \equiv 1 + \frac{\pi \tilde{I}_b}{8 b_0}. \quad (91)$$

Это равенство верно для любых  $\rho$  из интервала  $\rho_* \leq \rho \ll \sqrt{b_0}$ . Из (91) можно представить  $\gamma$  и  $\gamma u_z$  как функции от  $\gamma u_\phi$ :

$$\gamma = 1 + \frac{(\gamma u_\phi)^2}{2\alpha} + O(b_0^{-2}), \quad (92)$$

$$\gamma u_z = \frac{(\gamma u_\phi)^2}{2\alpha} + (1 - \alpha) + O(b_0^{-2}). \quad (93)$$

Интегрируя (56) и учитывая (59), (89) и (93), получаем выражение для  $\delta b_z$ :

$$\delta b_z = -\frac{(\gamma u_\phi)^2}{2b_0} - \frac{1}{2b_0} \tilde{I}_b \ln \frac{\gamma |k| \rho}{2} + O(b_0^{-2}). \quad (94)$$

Также с помощью формулы (91) из условия (64) находятся радиус канала:

$$\rho_*^2 = \frac{2\tilde{I}_b \alpha}{b_0^2} [1 + O(b_0^{-2})] \quad (95)$$

и средняя плотность частиц пучка в нем:  $\langle \tilde{n}_b \rangle \approx \approx b_0^2/2\alpha$ .

При больших внешних полях выражение (61) для плотности электронов плазмы также можно существенно упростить. Вследствие (88) и (89) справедливо неравенство

$$|b_\phi^2 - \epsilon_\rho^2| \ll b_0^2.$$

Эта оценка позволяет всюду вне канала для вычисления  $\tilde{n}$  использовать выражение, аналогичное (67):

$$\tilde{n} \approx 1 + \frac{(b_0/2 - \omega_z)(\delta b_z + b_0 u_z) + \omega_z^2}{b_0(1 - u_z)(\beta + b_{z^*}/2 - \omega_z)}. \quad (96)$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ \delta b_z - \delta b_{z^*} + \frac{1 + b_0 \gamma u_\phi (\epsilon_\rho - b_\phi)}{(\gamma - \gamma u_z) b_0} \right].$$

На границе канала

$$\beta \approx (\alpha^{-1} + \tilde{I}_b/2)/(2b_0), \quad (97)$$

так что  $\beta + b_{z^*} - \omega_z \propto b_0^{-1}$  при  $\rho = \rho_*$ . Уже на небольших расстояниях от канала (при  $\rho - \rho_* \sim \rho_* \tilde{I}_b/b_0^4$ ) разность  $b_{z^*} - \omega_z$  становится порядка  $\beta$ , тогда как изменение величины  $\beta$  на этих расстояниях пренебрежимо мало. При  $\rho - \rho_* \gg \rho_* \tilde{I}_b/b_0^4$  разность  $b_{z^*} - \omega_z \gg \beta$ , и при вычислении плотности на таких расстояниях от канала точные значения  $\beta$  несущественны. Следовательно, можно в формуле (96) при всех  $\rho$  считать  $\beta$  постоянной величиной, определяемой равенством (97).

Подстановка (96) и (97) в (57) приводит вблизи канала к упрощенному уравнению (68). Зависимость  $\omega_z$  от  $\rho$  по-прежнему дается формулой (69), чем определяется также и азимутальная скорость электронов:  $\gamma u_\phi = \omega_z \rho$ . При  $\rho \gg \rho_*$  имеем  $\gamma u_\phi \approx \approx \tilde{I}_b/(2b_0 \rho)$ , что приближенно совпадает с зависимостью (80) при  $\rho \ll \sqrt{b_0}$ . Для вычисления плотности электронов плазмы при всех  $\rho \geq \rho_*$  можно

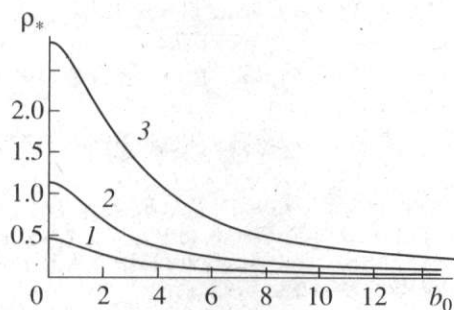


Рис. 11. Радиус ионного канала как функция внешнего магнитного поля для различных значений тока пучка  $\tilde{I}_b$ : 1 -  $\tilde{I}_b = 0.2$ ; 2 - 1; 3 - 5.

достаточно медленно. В нескольких предельных случаях уравнения, описывающие ионные каналы, решены аналитически. Проведенный анализ позволил составить достаточно полное представление о поведении плазмы при различных значениях напряженности внешнего магнитного поля. В частности, оказалось, что внешнее поле качественно меняет структуру канала, если циклотронная частота  $\omega_{B0} = eB_0/mc$  больше или порядка плазменной частоты  $\omega_p$  (т.е. когда  $b_0 \equiv \omega_{B0}/\omega_p \geq 1$ ).

Известно, что при  $B_0 = 0$  для образования каналов необходимо, чтобы плотность релятивистского электронного пучка превышала некоторое пороговое значение [7], совпадающее с  $n_0$  при  $I_b \ll I_c = mc^3/4e \approx 4.2$  кА и равное  $n_0/2$  при  $I_b \gg I_c$ . Найдем условие образования цилиндрических каналов в присутствии внешнего магнитного поля в частном случае малого тока пучка ( $I_b \ll I_c$ ). При малом токе пучка движение электронов плазмы является нерелятивистским, а возмущение магнитного поля мало. Как следует из (61) и (62), плотность электронов плазмы обращается на оси пучка в нуль, когда

$$n_b \approx n_0 \left( 1 + \frac{\omega_{B0}^2}{2\omega_p^2} \right)$$

на оси. Этим выражением и определяется плотность пучка, необходимая для образования канала.

Авторы выражают благодарность М.П. Федоруку за помощь при численном решении уравнений, описывающих ионные каналы.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, как из (6)–(9) можно получить уравнение (89). Используя равенство

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\gamma\mathbf{u} = \nabla\gamma - \mathbf{u} \times \text{rot}\gamma\mathbf{u}$$

и уравнения (6), (8), можно переписать соотношение (7) в виде

$$\epsilon = -\nabla\gamma - \mathbf{b}_0 \times \text{rot}\mathbf{b}.$$

После чего из (9) получаем

$$\delta\tilde{n} = \Delta(\gamma + \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{b}). \tag{98}$$

Далее перепишем уравнение (6) в виде

$$\delta\mathbf{b} = \text{rot}\gamma\mathbf{u} + \delta\tilde{n}\mathbf{b}_0 + b_0 \text{rot}\delta\mathbf{b}, \tag{99}$$

где  $\delta\mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0$ . Применяя операцию  $\text{rot}$  к обеим частям этого уравнения и подставляя найденное значение  $\text{rot}\delta\mathbf{b}$  в правую часть (99), имеем

$$\delta\mathbf{b} = \text{rot}\gamma\mathbf{u} + \delta\tilde{n}\mathbf{b}_0 - b_0\Delta(\gamma\mathbf{u} + \mathbf{b}) + \nabla\tilde{n} \times \mathbf{b}_0. \tag{100}$$

Подставив в (100) значение  $\delta\tilde{n}$  из (98) и взяв z-компоненту полученного уравнения, получаем искомое уравнение (89).

использовать формулу (96). В частности, на границе канала

$$\tilde{n}_* \approx b_z^2 \frac{1 + \tilde{I}_b/4}{2 + \alpha\tilde{I}_b/2}.$$

### 4.4. Обсуждение результатов

Мы видим, что качественные эффекты, обнаруженные в плоской геометрии, имеют место и в случае осесимметричных пучков. Радиус канала максимален при  $b_0 = 0$  и убывает с ростом внешнего магнитного поля (рис. 11). Когда  $b_0$  приближается к единице, канал сужается примерно вдвое. При  $b_0 \gg \tilde{I}_b$  закон подавления канала иной, нежели в плоском случае:  $\rho_* \propto b_0^{-1}$ . Продольное магнитное поле выталкивается из канала, причем тем сильнее, чем больше ток пучка. При этом оставшееся в канале поле всегда больше  $b_0/2$  (рис. 9).

Есть, однако, и отличия от плоского случая. Даже при малом токе пучка сильное внешнее поле создает узкий пик электронной плотности вблизи границы канала (рис. 6а, 8а). Электроны в этом слое быстро вращаются вокруг оси пучка, так что действующая на них сила Лоренца изменяет направление их продольного движения (рис. 10). Устойчивость такого пика плотности еще предстоит исследовать. Также отметим, что при  $\tilde{I}_b \geq 1$  движение электронов вблизи канала является релятивистским при любых значениях  $b_0$  (рис. 8б).

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены ионные каналы, образуемые в однородной плазме плотными ультрарелятивистскими электронными пучками в присутствии внешнего магнитного поля. Интегрированием уравнения вмерзженности (3) показано, что параметры ионного канала не зависят от формы переднего фронта пучка, если ток пучка нарастает

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валлис Г., Зауэр К., Зюндер Д. и др. // УФН. 1974. Т. 133. № 3. С. 435.
2. Breizman B.N., Ryutov D.D. // Nucl. Fusion. 1974. V. 14. № 6. P. 873.
3. Миллер Р. Введение в физику сильнооточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984.
4. Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильнооточных релятивистских пучков. М.: Атомиздат, 1980.
5. Sessler A.M. // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. № 6. P. 1325.
6. Wurtele J.S. // Ibid. 1993. V. 5. № 7. P. 2363.
7. Lotov K.V. // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. № 7. P. 2753.
8. Котельников И.А., Худик В.Н. // Физика плазмы. 1997. Т. 23. № 2. С. 146.
9. Uhm H.S., Joyce G. // Phys. Fluids B. 1991. V. 3. № 7. P. 1587.
10. Росинский С.Е., Рухлин В.Г. // ЖТФ. 1972. Т. 42. № 3. С. 511.
11. Davidson R.C., Uhm H.S. // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 7. P. 1375.
12. Breizman B.N., Tajima T., Fisher D.L., Chebotaev P.Z. // Research Trends in Physics: Coherent Radiation and Particle Acceleration / Ed. by A.P. Prokhorov. New York: AIP Press, 1992. P. 263.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.